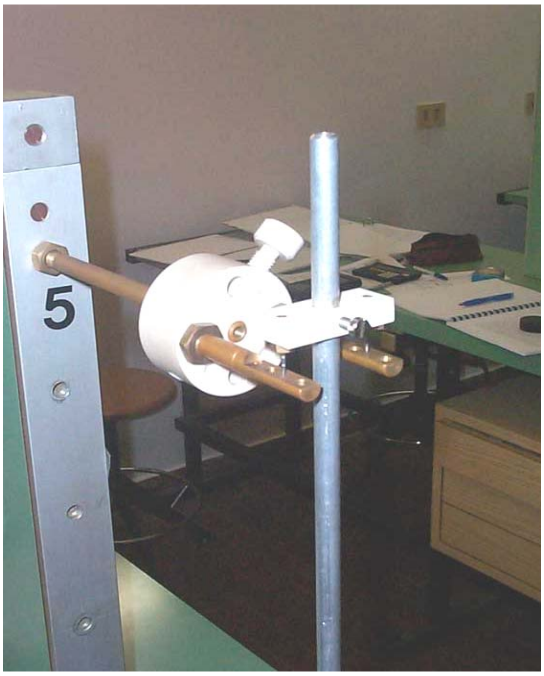
IL PENDOLO COMPOSTO

Il pendolo semplice non è adatto per una misura precisa dell'accelerazione di gravità. Infatti l'analisi degli istogrammi delle misure ripetute del periodo del pendolo semplice mostra delle variazioni significative e in alcuni casi notevoli tra le diverse misure. Fra i tanti motivi che condizionano la misura vi è il fatto di trascurare le dimensioni del pesetto, vale a dire considerarlo come un punto materiale. In realtà il pesetto ha un suo momento di inerzia, così come ha una massa e un momento di inerzia anche il filo. Altre cause di errore sono dovute al fatto che le oscillazioni non avvengono perfettamente su un piano e, inoltre, il filo non è rigorosamente inestensibile.
Come è possibile migliorare il pendolo semplice per ottenere delle misure del periodo, e quindi di g, più accurate? Si potrebbe pensare di mettere al posto del filo un'asta metallica. Per rendere le oscillazioni piane si può utilizzare un sistema di sospensione dell'asta costituito da una forcella fissa che sostiene un ponticello munito di bulloncini con punta, come mostra la figura.



La linea immaginaria passante per le due punte costituisce l'asse di rotazione o *sospensione* dell'asta. In generale qualunque corpo rigido che può ruotare attorno a un asse orizzontale fisso costituisce un cosiddetto ***pendolo composto*** o ***pendolo fisico***. Evidentemente un simile pendolo si trova in una posizione di equilibrio quando la verticale passante per il baricentro incontra l'asse di rotazione. Delle due posizioni d'equilibrio fisicamente possibili è ovviamente stabile quella in cui il baricentro sta sotto l'asse di rotazione. Spostando quindi il pendolo da questa posizione, una volta libero esso comincerà ad oscillare.

In assenza d'attrito e sotto l'ipotesi delle piccole oscillazioni, si può dimostrare che per un pendolo composto il periodo di oscillazione è il seguente:

$$(1) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

dove J è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, d la distanza tra l'asse di sospensione e il baricentro, m è la massa totale del pendolo.
Dalla (1) si osserva che la determinazione dell'accelerazione di gravità g mediante un pendolo composto richiederebbe la misura, oltre del periodo T, anche delle quantità J, m, d. Tuttavia se si confronta l'equazione precedente con la relazione che definisce il periodo del pendolo semplice di lunghezza L:

$$(2) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ci si rende conto che, se si definisce *lunghezza equivalente Le* la quantità

$$L_e = \frac{J}{md}$$

la (1) può essere riscritta nel seguente modo

$$(3) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L_e}{g}}$$

Quindi la misura di g risulterebbe molto semplificata se, con un qualche accorgimento sperimentale, si riuscisse a misurare Le (*).

Per accertare tale eventualità è opportuno analizzare come varia il periodo del pendolo composto al variare della distanza *d* tra il baricentro e l'asse di sospensione.

Pertanto si ripetono le misure di T per successive posizione del ponticello sempre più prossime al baricentro dell'asta , quindi si inverte il ponticello e si capovolge l'asta proseguendo nei rilevamenti.

Nella figura 1 e 2 è mostrato l'andamento di T in funzione di *d* nel caso di un pendolo costituito da un'asta di alluminio lunga 1 metro e di diametro 10 mm.

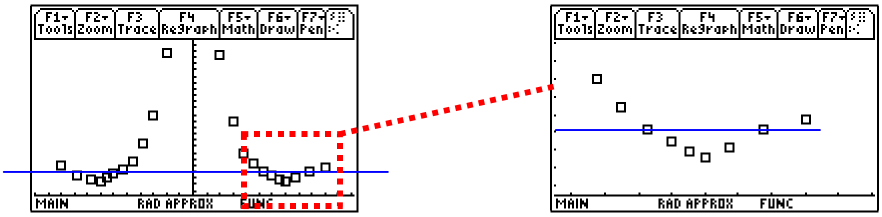


figura 1 e 2, elaborazione TI-89

Come si può notare, per un prefissato valore di T, diverso da T_{min}, esistono quattro posizioni del ponticello e quindi quattro punti di sospensione per i quali il pendolo oscilla con lo stesso periodo (in altri termini possiede lo stesso valore di Le). Si può dimostrare che la distanza tra due di questi punti opposti al baricentro e non consecutivi è pari alla lunghezza equivalente.

Infatti per il teorema di Huygens-Steiner, il momento di inerzia J può essere espresso mediante il momento di inerzia J_G rispetto ad un asse passante per il baricentro distante d

$$(3) \quad J = J_G + md^2$$

L'espressione del periodo del pendolo diventa allora

$$(4) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J_G + md^2}{mdg}}$$

Le soluzioni della (4) rispetto a d, per un dato valore di T, individuano i due punti cercati. Queste soluzioni sono ottenibili quadrando ed ordinando la (4); si ottiene l'equazione di secondo grado

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2} d + \frac{J_G}{m} = 0$$

di questa equazione il prodotto e la somma delle due radici devono uguagliare il termine noto e il coefficiente di primo grado cambiato di segno

$$d_1 d_2 = \frac{I_G}{m} \qquad d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Se si ricava T dall'ultima relazione si ottiene:

$$(5) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}$$

Confrontando la (5) con la (3) si comprende che il pendolo composto, se fatto oscillare su assi di sospensione posti a distanza dal centro di massa pari a d_1 e d_2, presenta lo stesso valore del periodo ed è equivalente ad un pendolo semplice di lunghezza Le = $d_1 + d_2$. Tra le quattro distanze dal baricentro individuabili sperimentalmente, corrispondenti ad uno stesso periodo di oscillazione, <u>vanno scelte quelle opposte e non simmetriche rispetto al baricentro</u>. In questo modo la loro somma coincide con la distanza tra i due assi di sospensione, facilmente misurabile in quanto non richiede neppure di conoscere la posizione del baricentro.
In definitiva un pendolo composto che oscilla con lo stesso periodo attorno a due assi di sospensione paralleli e collocati asimmetricamente da parte opposte rispetto al baricentro, si comporta come un pendolo semplice di lunghezza pari alla distanza tra gli assi.

Dalla (4) si osserva che, essendo il momento di inerzia una costante del pendolo, il periodo è funzione solo della distanza d tra l'asse di sospensione e l'asse per il centro di massa. E' facile verificare che esso presenta un minimo per :

$$d_{\min} = \pm \sqrt{\frac{I_G}{m}}$$

Poiché per un'asta cilindrica di lunghezza *l* si ha che:

$$J_G = \frac{1}{12} m l^2$$

si ottiene

$$d_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{3} l$$

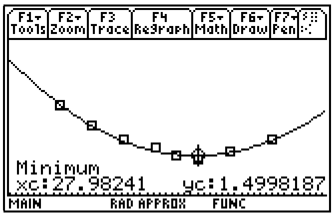
Sostituendo le ultime due equazioni nella (4) si ricava

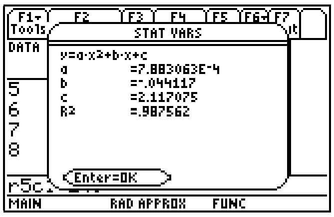
$$T(d_{\min}) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{3}g}}$$

che confrontata con la (3) fornisce un modo immediato per determinare la lunghezza equivalente nel caso di un'asta cilindrica omogenea:

$$(5) \quad L_e = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

La funzione T=T(d) in prossimità del minimo. Per determinare d_{min} dai dati della figura 2 si interpolano le misure con una parabola utilizzando soltanto alcuni dati, ad esempio 8, intorno al valore minore del periodo. Si ottiene così il seguente grafico con la finestra che fornisce i valori dei coefficienti della parabola dei minimi quadrati.





Le coordinate del minimo della parabola interpolatrice sono d_{min} = 27.98 cm, T_{min} = 1.50 s. La distanza tra i due minimi è con buona approssimazione pari a 56 cm che coincide con il valore della lunghezza equivalente definito dalla (5). Quindi è lecito assumere

$$Le = 2 \cdot d_{\min} \approx 56\,cm = 0.56\,m$$

Esplicitando g dall'equazione (3), si ottiene per l'accelerazione di gravità il valore 9.83 m/s^2.

(*) Si tenga presente che per un pendolo composto Le non è la distanza del baricentro del sistema dall'asse di rotazione, ma corrisponde invece alla lunghezza che dovrebbe avere un pendolo semplice per compiere oscillazioni con lo stesso periodo del pendolo composto in esame.